TEMA 1

ESERCIZIO 1 Sia R una anello commutativo. Provare che se $\{0\}$ e R sono gli unici ideali di R allora R è un campo.

ESERCIZIO 2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $L : V \to V$ una applicazione lineare tale che $L^2(L - \mathsf{Id})(v) = 0$ per ogni $v \in V$, $L^2 \neq 0$, $L(L - \mathsf{Id}) \neq 0$. Si determinino gli autovalori di L e se ne trovi la possibile molteplicità algebrica e geometrica.

ESERCIZIO 3 In $\mathbb{R}^3$ sia data la topologia Euclidea. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, -1 \leq z \leq 1\}$ con la topologia ereditata da $\mathbb{R}^3$. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

ESERCIZIO 4 Sia S una superficie regolare e connessa di $\mathbb{R}^3$.

(1) Si provi che se $C \subset S$ è una linea di curvatura che è anche una geodetica allora C è una curva piana.
(2) Si provi che se una geodetica di S non rettilinea è una curva piana allora è una linea di curvatura.
(3) Dare un esempio di una curva piana che sia una linea di curvatura ma non una geodetica.
(4) Provare che se tutte le geodetiche di S sono curve piane, allora S ha tutti punti ombelicali.
(5) Supponiamo che S sia inoltre compatta. Provare che se tutte le geodetiche di S sono curve piane, allora S è una sfera.

ESERCIZIO 5 Sia $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z \geq 0\}$ e sia $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $f : \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z > 0\} \to \mathbb{C}$ sia olomorfa. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si abbia $\mathsf{Im}\, f(x) = 0$ e che $f(1/n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che $f \equiv 0$.

ESERCIZIO 6 Si consideri un pendolo formato da un'asta OA materiale omogenea pesante di massa m e lunghezza l, libera di ruotare intorno al punto O mantenendosi in un piano verticale π. Il piano π ruota intorno all'asse verticale passante per il punto O con velocità angolare costante $\vec{\omega}$

(1) Scrivere le equazioni cardinali nel sistema di riferimento ruotante (solidale col piano π).
(2) Scrivere risultante e momento risultante delle forze di Coriolis.
(3) Scrivere risultante e momento risultante delle reazioni vincolari.
(4) Determinare la Lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni di Lagrange di II specie.

ESERCIZIO 7 Sia la funzione $u = u(x, t)$ dipendente da x e t tramite il rapporto $\frac{x^2}{t}$, ovvero $u(x, t) = v(\frac{x^2}{t})$, con $t > 0$ e $x \in \mathbf{R}$. Si chiede di

(1) dedurre l'equazione differenziale ordinaria (EDO) soddisfatta da $v(\cdot)$, se u è soluzione (in senso classico) dell'equazione del calore $u_t = u_{xx}$ su $\mathbf{R} \times (0, \infty)$;

(2) esprimere la soluzione $v = v(z)$ del'EDO di cui al punto precedente come funzione integrale (dipendente da due costanti c e d), e verificare che, mediante una scelta appropriata della costante c, la funzione $\frac{\partial}{\partial x} v(\frac{x^2}{t})$ fornisce la *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore, ovvero

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} .$$

ESERCIZIO 8 Si consideri il problema ai valori iniziali per l'equazione di evoluzione

$$\begin{cases} u_t(x,t) - a\Delta u(x,t) + b\|Du(x,t)\|^2 = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases} \tag{0.1}$$

ove a, b sono costanti, con $a > 0$ e $b \neq 0$ (Δu e Du indicano il laplaciano e il gradiente di $u(\cdot, t)$, rispettivamente).

(1) Si introduca la trasformazione $w = \varphi(u)$ e si determini φ in modo tale che w risolva un'EDP *lineare*. La trasformazione trovata è detta di *Cole-Hopf*.

(2) Assumendo g continua e limitata, si risolva il problema ottenuto per w e si deduca una formula esplicita per la soluzione $u(x,t)$ del problema (0.1).

ESERCIZIO 9 In un gioco con n concorrenti, ogni concorrente scrive a caso il nome di un altro concorrente e così lo elimina. Calcolare:

(1) la probabilità che i due giocatori A e B si eliminino a vicenda;

(2) il numero medio di concorrenti eliminati determinandone il valore approssimato per n grande.

(3) la probabilità che tutti i giocatori vengano eliminati.

ESERCIZIO 10 Sia data $A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Calcolare $\sqrt{A}$ e $\lim_{n\to\infty} A^n$.

ESERCIZIO 11 Trovare il valore massimo nell'intervallo $[0,1]$ della funzione

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + (1-x)^2(x-t)^2}\, dt\,.$$

ESERCIZIO 12 Descrivere i quadrilateri di area massima tra quelli di diametro assegnato. Descrivere i pentagoni di area massima tra quelli di diametro assegnato.

TEMA 2

ESERCIZIO 1 Sia G un gruppo e siano H, K due sottogruppi di G. Provare che $HK = \{a \in G : \exists h \in H, k \in K \text{ tali che } a = hk\}$ è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$. In questo caso provare che HK è il sottogruppo generato da $H \cup K$.

ESERCIZIO 2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $L : V \to V$ una applicazione lineare tale che $L^2(v) = v$ per ogni $v \in V$, ma $L \neq \mathsf{Id}$. Si determinino gli autovalori di L, e si trovino gli associati sottospazi.

ESERCIZIO 3 In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{V}$ la famiglia di insiemi della forma $Q_{a,b,c,d} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}$ con $a < b, c < d$.

(1) Provare che $\mathcal{V}$ è una base per una topologia τ su $\mathbb{R}^2$.
(2) Provare che la topologia τ è più fine della topologia Euclidea su $\mathbb{R}^2$.
(3) Provare che $\mathbb{R}^2$ con la topologia τ è separabile.
(4) Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$. Provare che la topologia indotta da τ su Y è la topologia discreta e che Y con tale topologia non è separabile.
(5) Provare che $\mathbb{R}^2$ con la topologia τ non ammette una base numerabile di aperti.

ESERCIZIO 4 Sia S una superficie regolare e connessa di $\mathbb{R}^3$. Sia $f : S \to S$ una isometria. Sia $p \in S$ tale che per ogni $q \in S$ esiste una geodetica in S che congiunge p con q. Supponiamo che $f(p) = p$ e $df_p = \mathsf{id}$. Provare che $f(q) = q$ per ogni $q \in S$.

ESERCIZIO 5 Sia $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe tali che $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \leq 1 + 1/n$, $f_n(0) = 0$ e $f_n'(0) = 1 - 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = z$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

ESERCIZIO 6 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2, ciascuno di massa m, vincolati a muoversi liberamente (senza attrito) su una guida parabolica di equazione $x = y^2$, situata su un piano orizzontale (fisso) π. I due punti sono sollecitati dall'azione di tre forze elastiche di costante elastica k: due di esse, $-k(P_1 - O)$ e $-k(P_2 - O)$ hanno centro nel vertice della parabola O, la terza $-k(P_1 - P_2)$ è una forza elastica interna fra i due punti P_1 e P_2. Si scelgano come coordinate lagrangiane le ordinate y_1 e y_2 dei due punti.

(1) Scrivere le espressioni lagrangiane delle energie cinetica e potenziale.
(2) Riconoscere che la posizione individuata $y_1 = y_2 = 0$ è di equilibrio per il sistema e studiarne la stabilità.
(3) Scrivere le equazioni di Lagrange di II specie. Linearizzare tali equazioni e determinare le frequenze proprie ed i corrispondenti modi normali.
(4) Imponendo l'ulteriore vincolo $y_1 = -y_2$, studiare l'andamento qualitativo del moto al variare dell'energia totale E_0. In particolare, sotto le condizioni iniziali $y_1^0 = l$ e $\dot{y}_1^0 = 0$, calcolare il valore della $\dot{y}_1$ nell'istante in cui è $y_1 = 0$.

ESERCIZIO 7 Si consideri una lamina quadrata ABCD, composta di materiale omogeneo pesante, che è libera di ruotare senza attrito intorno al lato AB vincolato ad una retta orizzontale. Oltre al peso agisce un campo di forze di resistenza al moto proporzionale (con costante di proporzionalità $\lambda > 0$) al quadrato della velocità di ciascun punto della lamina e all'unità di superficie.

(1) Calcolare la struttura di inerzia (ovvero la matrice d'inerzia) della lamina rispetto al punto A.
(2) Scrivere l'equazione di moto della lamina.
(3) Discutere la linerizzazione dell'equazione rispetto alla configurazione di equilibrio.

ESERCIZIO 8 Sia $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

e sia $z = (x,y)$.

Si consideri il seguente sistema gradiente

$$z' = -\mathrm{grad}\, V\,.$$

(1) Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiare la loro stabilità.
(2) Studiare le curve di livello del grafico di V.
(3) Vi sono punti di equilibrio che sono asintoticamente stabili?

ESERCIZIO 9 Siano X ed Y variabili aleatori normali multivariate con valori attesi m_X ed m_Y e matrice di covarianza $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$.

In termini dei valori attesi e dei coefficienti della matrice di covarianza,

(1) indicare come stimare $P(X - Y > 3)$;
(2) calcolare $E(X^2Y)$.

ESERCIZIO 10 Dato $a > 0$, dimostrare che la successione

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

converge a $\sqrt{a}$, per ogni scelta del punto iniziale $x_0 > 0$.

ESERCIZIO 11 Indicare per quali valori di p e q la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^p sen(x^q) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua, lipschitziana o assolutamente continua, rispettivamente.

ESERCIZIO 12 Descrivere gli insiemi di perimetro minimo tra quelli contenuti in un quadrato assegnato ed aventi area assegnata.

TEMA 3

ESERCIZIO 1 Sia G un gruppo finito di ordine n. Provare che se n è primo allora G è ciclico.

ESERCIZIO 2 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

(1) Trovare tutti i valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali per cui A e $B_{\alpha,\beta}$ siano diagonalizzabili simultaneamente.
(2) Trovare una base ortonormale formata da autovettori per la matrice A.
(3) Può la base trovata in (2) essere una base di autovettori anche per $B_{\alpha,\beta}$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

ESERCIZIO 3 Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus X$.

ESERCIZIO 4 Siano S_1, S_2 due superfici regolari e distinte di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ e che per ogni $p \in S_1 \cap S_2$ si abbia $T_pS_1 \neq T_pS_2$ (dove T_pS indica il piano tangente a S in p). Provare che $S_1 \cap S_2$ è una curva regolare.

ESERCIZIO 5 Sia $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$. Siano $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ due funzioni olomorfe tali che $f \circ g = g \circ f$. Supponiamo che $f \neq \mathsf{id}$ e che esista $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $f(z_0) = z_0$. Provare che $g(z_0) = z_0$.

ESERCIZIO 6 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2, ciascuno di massa m, vincolati a muoversi liberamente (senza attrito) su una guida parabolica di equazione $y = x^2$, situata su un piano orizzontale (fisso) π. I due punti sono sollecitati dall'azione di tre forze elastiche di costante elastica k: due di esse, $-k(P_1 - O)$ e $-k(P_2 - O)$ hanno centro nel vertice della parabola O, la terza $-k(P_1 - P_2)$ è una forza elastica interna fra i due punti P_1 e P_2. Si scelgano come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei due punti.

(1) Scrivere le espressioni lagrangiane delle energie cinetica e potenziale.
(2) Riconoscere che la posizione individuata $x_1 = x_2 = 0$ è di equilibrio per il sistema e studiarne la stabilità.
(3) Scrivere le equazioni di Lagrange. Linearizzare tali equazioni e determinare le frequenze proprie ed i corrispondenti modi normali.
(4) Imponendo l'ulteriore vincolo $x_1 = -x_2$, studiare l'andamento qualitativo del moto al variare dell'energia totale E_0. In particolare, sotto le condizioni iniziali $x_1^0 = l$ e $\dot{x}_1^0 = 0$, calcolare il valore della $\dot{x}_1$ nell'istante in cui è $x_1 = 0$.

ESERCIZIO 7 Si consideri l'equazione di Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0\,, \quad \text{in}\,\mathbf{R}\times(0,\infty)\ ; \tag{0.2}$$

questa equazione alle derivate parziali non lineare è un modello per la descrizione di onde di superficie in acque poco profonde. Si cercano soluzioni di (0.2) nella forma (di onde viaggianti)

$$u(x,t) = v(x-\sigma t)\ ,\quad (x \in R, t > 0)\ ,$$

ove σ è una costante.

(1) Determinare l'Equazione Differenziale Ordinaria (EDO) soddisfatta da v, se u è soluzione dell'equazione di KdV (0.2), e dedurre da quella, integrando due volte, una famiglia di EDO del primo ordine (nell'incognita v).
(2) Individuare nella famiglia di EDO ottenuta al punto precedente l'equazione che ammette unicamente soluzioni che soddisfano v, v', $v'' \to 0$ per $s \to \pm\infty$ (in tal caso u è detta onda *solitaria*). Dedurre $v = v(s)$ almeno in forma implicita.

ESERCIZIO 8 Si consideri la lamina materiale di massa m costituita dai punti della regione piana delimitata dal quadrato $ABCD$ di lato l e dal quarto di disco con origine in A e raggio l, ovvero

$$\{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le l\,,\ 0 \le y \le l\,,\ x^2 + y^2 \le l\,\}\,.$$

(1) Scrivere la matrice d'inerzia rispetto al punto A.
(2) Scrivere l'equazione dell'ellissoide d'inerzia e determinarne gli assi principali.

ESERCIZIO 9 Uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si dice non atomico se $P(A) > 0$ implica che esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $0 < P(B) < P(A)$.

(1) Mostrare che la misura di Lebesgue sulla σ-algebra dei boreliani in $[0,1]$ identifica uno spazio di probabilità non atomico.
(2) Dimostrare che in uno spazio di probabilità non atomico se $P(A) > 0$ e $\epsilon > 0$ allora esiste $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, tale che $0 < P(B) < \epsilon$.

ESERCIZIO 10 Sia assegnata la matrice, fattorizzata in forma LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 2 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolarne il numero di condizionamento in norma 1 e ∞.

ESERCIZIO 11 Tra tutti i polinomi monici di terzo grado in x trovare il valore minimo di

$$\int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx\,.$$

ESERCIZIO 12 Sia C un convesso piano con baricentro in O. Una retta passante per O divide C in due parti. Quanto vale al massimo il rapporto tra le aree delle due parti?