Università degli Studi di Firenze
Esame di ammissione al Dottorato in Matematica, XXVII Ciclo

1] Sia p un numero primo positivo, e sia

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^{p^n} = 1\}.$$

Si provi che G è un gruppo moltiplicativo. Si trovi un $\psi \in End(G)$ (cioè un omomorfismo $G \to G$) che sia suriettivo ma non iniettivo. Si provi che $\phi \in End(G)$ è un automorfismo se e solo se è iniettivo.

2] Sia $E|F$ una estensione di campi finiti. Si provi che il suo gruppo di Galois è ciclico.

3] Sia $X = C^0([0,1])$ munito della norma $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Si consideri l'operatore lineare $T : X \to X$ definito da

$$(Tf)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$$

a) Calcolare la norma di T, indicando se è assunta;
b) Analizzare l'iniettività e la suriettività di T;
c) Determinare l'immagine di T.

4] Sia f una funzione reale continua in $(0,1)$.
a) Dimostrare che se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) - \alpha x$ non ha massimi locali in $(0,1)$ allora f è convessa in $(0,1)$;
b) Dimostrare che f è convessa in $(0,1)$ se e solo se $f(x) \le (1/2h) \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt$ per ogni intervallo $[x-h, x+h] \subset (0,1)$;
c) se si rimuove l'ipotesi di continuità di f l'equivalenza descritta al punto b) è ancora vera?

5] Sia (X, d) uno spazio metrico munito di distanza d e sia $f : X \to X$ una isometria, ovvero $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.
a) Mostrare che f non è necessariamente surgettiva;
b) provare che se (X, d) è completo, allora l'immagine di f è chiusa in X ;
c) provare che se X è compatto, allora f è un omeomorfismo.

6] Sia S una superficie differenziabile regolare compatta in $\mathbb{R}^3$. Sia H la curvatura media.
a) Provare che $\int_S H^2\, dA > 0$;
b) provare che $\int_S H^2\, dA \ge \int_S K\, dA$, dove K è la curvatura gaussiana;
c) se vale che

$$\int_S H^2\, dA = 2\pi\chi(S)$$

dove $\chi(S)$ è la caratteristica di Eulero di S, cosa si può dedurre su S ?

7] Due punti materiali di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono adagiati in una conca semicircolare di raggio r e collegati da un'asta rigida di lunghezza $\sqrt{2}r$ e massa trascurabile (il problema si svolge in un ambiente ideale bidimensionale). Si denoti l'accelerazione di gravità con g. Introdurre come coordinata generalizzata l'angolo $\theta := \theta_2$ formato dal secondo punto materiale con la verticale (di modo che il fondo della conca corrisponda a $\theta_2 = \pi$ e sia sempre $\theta_1 > \theta_2$). Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale, la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange. Determinare il punto di equilibrio stabile e la frequenza di piccole oscillazioni. Supponiamo di riempire la conca con un fluido che esercita una forza d'attrito $-\mu \mathrm{d}l\hat{v}$ su ogni porzione dell'asta avente lunghezza $\mathrm{d}l$ e velocità $\vec{v}$ ($\hat{v}$ indica il corrispondente versore). Quanto vale la forza generalizzata Q_θ?

8] Una sferetta di massa m e raggio r è posta sulla sommità di una calotta sferica di raggio R. Per effetto della gravità la sferetta comincia a rotolare senza scivolare lungo un parallelo della calotta sferica. Si denoti l'accelerazione di gravità con g, e sia θ la coordinata polare che fissa la posizione della sferetta sulla calotta sferica. Come si scrive la velocità angolare della sferetta, in un riferimento inerziale solidale con la calotta sferica, in termini di $\dot{\theta}$? Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale, la Lagrangiana e l'energia totale. Quest'ultima si conserva? Nel suo moto verso il basso, a quale angolo θ_{max} la sferetta si distacca dalla calotta? (Il momento d'inerzia di una sfera omogenea di massa m e raggio r rispetto ad un asse passante per il centro della sfera è $\frac{2}{5}mr^2$)

9] Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti e con la stessa distribuzione geometrica di parametro p, ossia, $P(X=k)=p(1-p)^k$, $k=0,1,\ldots$. Siano $Z=Y-X$ ed $M=\min(X,Y)$. Determinare se M e Z sono indipendenti.

10] Di tre eventi A, B e C in uno spazio di probabilità si dice che A è condizionatamente indipendente da B dato C se $P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$. Si supponga che A, B e C siano tali che A è condizionatamente indipendente da B dato C. Delle affermazioni seguenti, dare una dimostrazione se sono vere o un controesempio se sono false.

- A è condizionatamente indipendente da C dato B.
- $P(A|B\cap C)=P(A|C)$.
- il complemento di A, A^c, è condizionatamente indipendente da B dato C.

11] Determinare una matrice ortogonale Q tale che

$$Q\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix},$$

con α reale. Quanto vale α? Qual è il valore più opportuno per implementare il problema su calcolatore, e perché?

12] Calcolare il determinante delle seguenti due matrici, verificandone la nonsingolarità:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Quale di queste è fattorizzabile LU, e perché?