Esame di ammissione al
Dottorato in Matematica, XXIV Ciclo
Università di Firenze
Tema n. 1.

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m si muove su un piano orizzontale, vincolato senza attrito alla curva γ di equazioni polari

$$\rho(\theta) = R[\sin(\theta) + 1.2]$$

Il punto è soggetto a una forza elastica ideale di costante elastica k centrata nell'origine del sistema delle coordinate polari.

1. Determinare la curvatura, $C(\theta)$, di γ.
2. Scrivere l'equazione di moto del punto.
3. Determinare posizioni di equilibrio, discuterne la stabilità.
4. Determinare l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
5. Determinare il valore minimo dell'energia tale che il moto risultante abbia $\theta(t)$ monotona.

Esercizio 2. La famiglia di polinomi definita sull'intervallo $[-1, 1]$,

$$\begin{aligned} T_0(x) &\equiv 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

è nota come *famiglia dei polinomi di Chebyshev di prima specie.* Usando la parametrizzazione $x = \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, dimostrare che:

1. $T_k(x) \equiv \cos(k\theta)$, $k \geq 0$;
2. per $x \in [-1, 1]$, gli estremi di $T_k(x)$ sono assunti nei punti

$$\xi_j^{(k)} = \cos\left(\frac{j}{k}\pi\right), \qquad j = 0, 1, \ldots, k;$$

3. la famiglia di polinomi

$$\hat{T}_0(x) \equiv 1, \qquad \hat{T}_k(x) = 2^{1-k} T_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

   è una famiglia di polinomi monici;

4. denotato con Π'_k l'insieme dei polinomi monici di grado k, si ha:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{T}_k(x)| \equiv \|\hat{T}_k\| \;=\; \min_{p \in \Pi'_k} \|p\|.$$

5. Dire <u>molto brevemente</u> qual è l'uso di questi polinomi nell'interpolazione polinomiale.

Esercizio 3. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \sin y \cos x - y \sin x \cos y}{(x^4 + y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

risulta in $(0,0)$:

(a) continua,

(b) derivabile lungo ogni direzione.

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie gaussiane congiunte tali che:

$$E(X) = 1, \qquad Var(X) = 4, \qquad E(Y) = 0, \qquad Var(Y) = 9,$$

e la correlazione è $r = 0.3$. Determinare la covarianza di X e Y. Calcolare $P(X - Y \geq 4)$.

Esercizio 5 . Sia X uno spazio compatto e si consideri l'anello $C^0(X) = \{f | f\colon X \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$. Per ogni $x \in X$ denotiamo

$$M_x = \{f \in C^0(X) | f(x) = 0\}$$

(a) Provare che M_x è un ideale massimale.

(b) Sia M un ideale massimale di $C^0(X)$. Provare che esiste $x \in X$ tale che $M = M_x$.

Esame di ammissione al
Dottorato in Matematica, XXIV Ciclo
Università di Firenze
Tema n. 2.

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m si muove su un piano verticale, vincolato senza attrito alla curva γ di equazioni polari

$$\rho(\theta) = R[1.2 - \sin(\theta)].$$

L'asse polare è orizzontale e la semiretta $\theta = \pi/2$ è la verticale ascendente.

1. Determinare la curvatura, $C(\theta)$, di γ.
2. Scrivere l'equazione di moto del punto.
3. Determinare posizioni di equilibrio, discuterne la stabilità.
4. Determinare l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
5. Determinare il valore minimo dell'energia tale che il moto risultante abbia $\theta(t)$ monotona.

Esercizio 2. Sia dato il vettore

$$\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 4,\ 2)^T.$$

Costruire una matrice ortogonale e simmetrica Q tale che $Q\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{e}_1$ è il primo versore della base canonica su $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e siano $m := \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, $M := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, con $m, M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Si consideri la successione $s_n := \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$.

(i) Si dimostri che se esiste il limite l di (s_n) allora $m \leq l \leq M$.

(ii) La successione (s_n) ha necessariamente limite?

Esercizio 4.

(a) Si estrae a caso una mano di cinque carte da un mazzo di 40. Sia A la probabilità di trovare quattro carte di ugual valore. Si trovi il numero maggiore tra A e 6^{-4}.

(b) Si estrae a caso una mano di **quattro** carte da un altro mazzo di 40. Sia B la probabilità di trovare **almeno tre** carte di ugual valore. Si determini se $A < B$, $A = B$ oppure $A > B$.

Esercizio 5.

(a) Si determini il numero di radici reali dell'equazione di grado n

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 0$$

al variare di $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Dette $x_1, \ldots, x_n$ le radici complesse, si calcoli $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Esame di ammissione al
Dottorato in Matematica, XXIV Ciclo
Università di Firenze
Tema n. 3.

Esercizio 1. Un punto materiale di massa m si muove su un piano verticale, vincolato senza attrito alla curva γ di equazioni polari $\rho(\theta) = R[\sin(\theta) + 1.2]$.

L'asse polare è orizzontale e la semiretta $\theta = \pi/2$ è la verticale ascendente.

1. Determinare la curvatura, $C(\theta)$, di γ.
2. Scrivere l'equazione di moto del punto.
3. Determinare posizioni di equilibrio, discuterne la stabilità.
4. Determinare l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
5. Determinare il valore minimo dell'energia tale che il moto risultante abbia $\theta(t)$ monotona.

Esercizio 2. Determinare la soluzione del problema ai valori iniziali

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -x(t), \quad t \geq 0, \qquad x(0) = 0, \ y(0) = 1.$$

La sua approssimazione numerica mediante il metodo di Eulero esplicito è data da:

$$x_0 = 0, \ y_0 = 1, \qquad x_{k+1} = x_k + hy_k, \quad y_{k+1} = y_k - hx_k, \quad k \geq 0,$$

dove h è il *passo di integrazione*. Per h fissato, ritieni che la simulazione della traiettoria continua sia appropriata, su un intervallo di integrazione molto ampio? Motiva la tua risposta.

Esercizio 3. Dimostrare che:

(a)

$$\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} x^3 \, dx = \frac{6}{(n+1)^4}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx.$$

(Sugg.: $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x}$)

Esercizio 4. Si scelga un numero naturale a caso n tra 1 e 1000.

(a) Si determini la probabilità che n sia un divisore di 392.

(b) Si determini la probabilità che l'equazione $226x + 339y = n$ abbia soluzioni (x, y) entrambe intere.

(c) Si determini per quali a_1, a_2 interi il sistema

$$\begin{cases} x = a_1 \mod 6 \\ x = a_2 \mod 10 \end{cases}$$

ammette una soluzione x intera.

Esercizio 5. Siano A e B due punti con distanza a nello spazio euclideo. Si consideri il luogo E dei punti P tali che $\overline{AP} + \overline{BP} \leq 3a$; chiamiamo S la frontiera di E.

(a) Si provi che E è convesso.

(b) Si provi che i punti di S dove la curvatura gaussiana ammette massimo sono ottenuti intersecando S con la retta passante per A e B.

(c) Si calcoli il valore della curvatura gaussiana K nei punti dove ammette il massimo.