CONCORSO PER L'AMMISSIONE AL CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA AFFERENTE ALLA SCUOLA DI DOTTORATO IN SCIENZE CON SEDE AMMINISTRATIVA PRESSO L'UNIVERSITÀ DI FIRENZE, PUBBLICATO NEL SUPPLEMENTO CONCORSI ED ESAMI DELLA GAZZETTA UFFICIALE N. 78 DEL 2 OTTOBRE 2007.

**TEMA N. 3**

1) Sia $R$ l'ipotesi di Riemann, e $P$ la congettura che esistano infinitamente molte coppie di numeri primi $(p, p+2)$. Dimostra: o $R$ implica $P$ oppure $P$ implica $R$.

2) Siano $A$ un gruppo abeliano ed $n \in \mathbb{N}$. Provare che la funzione $\sigma_n : A \longrightarrow A$ definita da $\sigma_n(a) = a^n$ ùn morfismo di gruppi. Mostrare che, se $\sigma_n$ è suriettivo per ogni $n > 1$, allora $A$ non possiede sottogruppi massimali. Se $T$ è il sottogruppo degli elementi di periodo finito di $A$, mostrare che $\sigma_n(T) \leq T$ per ogni $n$. Usare questo fatto per provare che porre $\phi_n(a+T) = \sigma_n(a) + T$ definisce un endomorfismo $\phi_n$ di $A/T$. Determinare $\ker(\phi_n)$.

3) Trovare il campo di spezzamento $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^3 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$. Si determinino tutti i sottocampi di $\mathbb{F}$ ed il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{F} \mid \mathbb{Q}$. È vero che $\mathbb{F}$ è un'estensione semplice di $\mathbb{Q}$?

4) Nel piano complesso sia $i = \sqrt{-1}$, sia $v = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ e si consideri i punti $P_i = 1 + v^i$ per $i = 0, \ldots, 7$.

Si determini il baricentro degli otto punti $P_i$.

Si calcoli il perimetro dell'inviluppo convesso $C$ dei punti $P_i$

Si determini l'ordine del gruppo delle isometrie di $C$.

5) Siano $A$ e $B$ due punti con distanza $a$ nello spazio euclideo. Si consideri il luogo $Q$ dei punti $P$ tali che $\overline{AP} + \overline{PB} \leq 2a$.

Si provi che $Q$ è un solido di rotazione. Si determini l'area della sezione di $Q$ con un piano passante per $A$ e $B$. Si determini il volume di $Q$.

6) Sia $f$ la funzione di una variabile reale definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+5}.$$

(i) Determinare l'insieme $I$ di definizione di $f$.

(ii) Dimostrare che $f$ soddisfa un'equazione differenziale del primo ordine.

(iii) Calcolare la somma della serie per ogni $x \in I$.

7) Dimostrare che l'integrale improprio

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x}\, dx$ converge;

(ii) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x}\, dx$ non converge assolutamente;

(iii) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} (\sin x)(\log x)\, dx$ non converge.

8) Sia $\Omega = \{\underline{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\}$ e $\Delta u = 0$ in $\Omega$ con $u(\underline{x}) = f(\underline{x})$ su $\partial\Omega$.
1. Determinare la funzione di Green per il laplaciano con la condizione al contorno di Dirichlet.
2. Fornire soluzione del problema per $f(\underline{x}) = 1$.

9) Si consideri nel piano verticale, con riferimento cartesiano ortogonale $Oxy$ ($y$ asse verticale ascendente), il vincolo liscio di equazione $y = -a\cos(x/\ell)$ con $a$ ed $\ell$ costanti positive. Un punto materiale $P$ di massa $m$ si muove su esso soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare. All'istante $t = 0$, $P$ occupa la posizione di ascissa $x(0) = \pi\ell/4$ con velocità di modulo $v_0$.
1. Determinare le relazioni fra i parametri e l'accelerazione di gravità che assicurano moti con traiettorie non limitate, o limitate.
2. In quest'ultimo caso, se possibile, determinare il periodo delle eventuali oscillazioni.

10) Sia data la matrice tridiagonale di Toeplitz di dimensione $2n+1$

$$T = \begin{pmatrix} a & c & & \\ b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ & & b & a \end{pmatrix}_{2n+1\times 2n+1} ,$$

e sia $P$ la matrice di permutazione dispari-pari di pari dimensione:

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 2n-1 \\ 2n+1 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \\ 2n \end{pmatrix}.$$

Posto che

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

dove $A$ ha dimensione $n+1 \times n+1$ e $D$ ha dimensione $n \times n$. Quindi, determinare la fattorizzazione

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A & \\ B & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n+1} & A^{-1}C \\ & I_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che la matrice $T_1$ è ancora tridiagonale, e determinarne gli elementi.

11) Una matrice del tipo

$$M = \alpha I - B,$$

in cui $B$ è una matrice ad elementi reali e non negativi ($B \geq 0$), e

$$\alpha > \rho(B),$$

è detta essere una $M$-matrice. Dimostrare che $M$ è nonsingolare e

$$M^{-1} \geq 0.$$

Dimostrare inoltre che, se

$$B = B^T,$$

allora $M$ è simmetrica e definita positiva.

12) Data una catena di Markov $X_1, X_2, \ldots$ su $\{1, 2, 3\}$ con matrice di transizione $A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$:

(I) Dire qual è circa la probabilità di trovarsi ad un tempo $n$ grande nello stato 3 sapendo di essere partiti dallo stato 1.

(II) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

13) Si estraggono a caso $m$ palline da $n$ numerate da 1 ad $n$. Calcolare la probabilità che almeno una di quelle numerate da 1 a $k$ non venga estratta, sia nell'ipotesi che le palline estratte non vengano reinserite sia in quella che ci sia reinserimento. Determinare poi l'espressione asintotica di queste probabilità quando $n$ diverge, assumendo che $\frac{m}{n} \to \alpha \in [0, 1]$.